数理解析研究所講究録
424巻 1981年 99-105

有限群の subclass algebra について

阪市大 理　奥山 哲郎

有限群のモジュラー表現の研究は、大きく、指標理論的、加群論的，群環論的考察に分けられる。ここでは、群環論的考察において興味深いと思われる部分群による subclass algebra などについての性質をいくつか調べてみたい。

以下．pを素数，kを標数pの代数的閉体，Gを有限群とする。kG で群環を表す．kG は次の様にして．$kG\times G$-加群（加群は、右加群をいうものとする）；

$kG \ni \alpha$, $G\times G \ni (x,y)$, $\alpha(x,y) = x^{-1}\alpha y$ 。

§1．

Gの部分群Hに対し．$k(G;H) = C_{kG}(H)$ とおく（GのHによる subclass algebra）。$k(G;H)$ は．k上．GのHー共役和で張られている。この節では．$k(G;H)$の性質を調べてみたい。

(1.1). $k(G;H)$の元をkGに左からかけることによってkGの$kH\times G$-準同型がえられるが、これは、同型；

$$k(G;H) \simeq \mathrm{End}_{H\times G}(kG)$$

を与える。また、$H^{\Delta} = \{(h,h) ; h\in H\} \subseteq H\times G$ とおくとき

$$L_0(H^{\Delta})^{H\times G} \simeq kG \quad (L_0(H^{\Delta}) は trivial\ kH^{\Delta}-加群)$$

(1.2). $\tau ; kH\times G \longrightarrow kG$, $\tau((h,g)) = h^{-1}g$ とする。

(1). τは、$H\times G$-準同型で全型である。

(2). eをGのblock idempotent, Dをそのdefect groupとする。$D^{x}\cap H = 1$ for $\forall x\in G$ ならば、kGe は projective $kH\times G$-加群で、τと、$kG\rightarrow kGe$ (projection) の合成は、split-epiである。

興味深いのは（取り扱いやすいのは）、Hがp'-部分群、p-部分群のときであるように思われる。以下、この節では、Hをp'部分群と仮定して議論していく。

(1.3). $k(G;H)$はsymmetric k-algebraである。

証明は、kGがsymmetric k-algebraであることのよく知られた証明が適用できることより得られる。

環Aに対し，$J(A)$，$S(A)$で，それぞれ Jacobson radical，Socle を表すことにする。

kGと$k(G;H)$について次の関係が成立する。

(1.4). $J(k(G;H)) = J(kG) \cap k(G;H)$

$S(k(G;H)) = S(kG) \cap k(G;H)$.

証明．Hがp'-部分群であるから，(1.1)より，kGは，projective $kH\times G$-加群である。また，$J(kG)$は，$kH\times G$-加群としてのkGの radical である。このとき，(1.1)の前半の同型を調べると，(1.4)が導かれる。

$S(kG)$はkGの中心のある元で生成される（中山）ことに注意して次を得る。

(1.5). $S(k(G;H))kG = S(kG) = kG(S(k(G;H)))$.

Hがp'部分群であることより，Fossum [ ]，あるいは，Green [ ] の議論を適用して，$kH\times G$-加群と，$k(G;H)$-加群の間につぎの様な対応が存在する。

(1.6).

(1). $S(k(G;H)) \supseteq L$ を irreducible $k(G;H)$-加群とすると，LkGは，irreducible $kH\times G$-加群となる。

(2). $S(kG) \supseteq M$ を irreducible $kH\times G$-加群とすると

$M \cap k(G;H)$ は、irreducible $k(G;H)$-加群、または、0-加群となる。

(3). 上の対応で {Irreducible $k(G;H)$-加群} と {Irreducible $kH\times G$-加群、M で $\mathrm{Inv}_{H\Delta}(M) \neq 0$ なるもの} との1対1の対応ができる。

(1.6)と関連して、次の問題が、古くからある Brauer の予想として生じてくる。

(1.7) —問題— $D \in Syl_p(C_G(H))$, $D \subseteq P \in Syl_p(G)$ とする。L を (1.6). (1) の irreducible $k(G;H)$-加群とするとき、$(\dim_k L)_p\,|P:D| \geqq (\dim_k LkG)_p$ が成立するか?。

(1.8). (1.7)は、Brauer の次の予想と同値な内容である。(R, K, k) を p-modular system とする。φ を irreducible Brauer character, $G \ni x$ を p'-element とするとき、

$$|G : C_G(x)|\,\varphi(x)/\varphi(1) \in R$$

が成立するか?。

(1.7)と関連して、次の事柄が成立している。

(1.9) D, P を (1.7) のとおりとする。このとき

$k(G;H) \supseteq kD$ で，$k(G;H)$ は 右，左，自由 kD-加群とな る。特に． $\dim_k k(G;H) \equiv 0 \pmod{|D|}$

したがって $(\dim_k k(G;H))_p |P:D| \geqq (\dim_k kG)_p$.

§2.

有限群のモジュラー表現の理論において，p-部分群の中心化群との関係を調べるのに，Brauer による，Brauer homomorphism は，大事な道具である。最近，Alperin，Broué，Puig などによって，それが拡張された形で議論がなされ，さらに有効な手段として役立っている。p-部分群の正規化群に関しても，Brauer homomorphism と類似な homomorphism があることを，以下で示す。応用があるわけではないので，単に参考として記すのみにする。

以下，P を G の p-部分群とし，$\hat{P} = \sum_{x \in P} x \in kG$ とおく

$C_{kG}(\hat{P}) \supset A = \{\alpha \in C_{kG}(\hat{P}),\ \alpha\hat{P} = 0\}$ とし，
$k(G:\hat{P})^{\circ} = C_{kG}(\hat{P})/A$ とおく。

(2.1). $\sigma : C_{kG}(\hat{P}) \longrightarrow kN_G(P)$ を，次の様に定義する。; $C_{kG}(\hat{P}) \ni \alpha = \sum_{g \in G} a_g g \longmapsto \sum_{g \in N_G(P)} a_g g$.

このとき，σは，次の k-algebra epi を誘導する。

$$k(G:\hat{P})^{\circ} \longrightarrow kN_G(P)/J(kP)kN_G(P)$$

(2.2)． $k(G;\hat{P})^{\circ} \simeq \mathrm{End}_{kG}(\hat{P}kG)$

$$kN_G(P)/J(kP)kN_G(P) \simeq \mathrm{End}_{kN_G(P)}(\hat{P}kN_G(\hat{P}))$$

証明．(2.2)． $C_{kG}(\hat{P})$ の元を左から $\hat{P}kG$ にかけることによって，$\hat{P}kG$ の kG-準同型が得られる。そのとき，Aは 0-写像となるものである。また，計算によって，$k(G:\hat{P})^{\circ}$ の次元は，(P,P)-両側分解したときの cosets の個数であることがわかる。このことから，(2.2)の同型が得られる。

(2.1)．直接計算して確かめることもできるが，(2.2)を使って証明することもできる。$\hat{P}kN_G(P)$ は，trivial source をもつ加群の直和であるから，$P \supsetneq Q$ なる Q に対し，kQ-準同型 $f: \hat{P}kN_G(P) \to \hat{P}kN_G(P)$ について，$T_Q^{N_G(P)}(f)$ は 0-写像となる。この事実と，$\hat{P}kG$ と $\hat{P}kN_G(P)$ が Green Correspondant であることから (2.1) が導かれる。

(2.3)． Brauer homomorphism ；$k(G:P) \longrightarrow kC_G(P)$ は，(2.1) の特別な場合となっている。

証明. (2.1)のGとして. $P\times G$, Pとして$P^{\Delta}=\{(x,x);x\in P\}$をとる。このとき. $\widehat{P^{\Delta}}kP\times G\cong L_0(P^{\Delta})^{P\times G}$ $N_{P\times G}(P^{\Delta})=P^{\Delta}\cdot(1\times C_G(P))$となる。したがって. 自然な同型 $k(G:P)\simeq End_{kP\times G}(\widehat{P^{\Delta}}kP\times G)$, $kC_G(P)\simeq End_{kN_{P\times G}(P^{\Delta})}(\widehat{P^{\Delta}}kN_{P\times G}(P^{\Delta}))$が得られる。(2.1), (2.2)を適用して. 証明が終わる。

参考文献

[1]. Alperin. Broué ; Local methods in block theory, Ann. Math. 110(1979), 143-157

[2]. Feit ; Representations of Finite Groups, Yale Univ. (1969)

[3]. Fossum ; Endomorphism rings of induced linear representations, Illinois J. Math. 16(1972). 143-153.

[4]. Green ; On a theorem of H. Sawada. J. London Math. Soc. (2) 18 (1978) 247-252